



## TÉCNICAS DE CONTROLE APLICADA A UM SISTEMA DE ALAVANCA PARA ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES

**Rodolfo de Sousa Santos**  
**Clivaldo Silva de Araújo**  
**Seyyed Said Dana**

Departamento de Tecnologia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, Campus I,  
CEP 58.059-900, João Pessoa - Pb - Brasil - e-mail: clivaldo@ct.ufpb.br

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma análise sobre o desempenho dinâmico de um sistema de alavanca para o isolamento de vibrações submetido a controle ativo em baixa frequência. O modelo dinâmico do sistema de alavanca é obtido a partir das equações de Newton e escritos na forma matricial. Inicialmente apenas o modelo da planta, composta da barra e dos apoios, é analisada. Realiza-se uma otimização dos parâmetros rigidez e amortecimento verificando os valores que indicam o melhor desempenho do sistema. Em seguida, introduz-se o controle ativo, compostos de sensor, amplificador, motor e parafuso sem-fim. Finalmente, acrescenta-se um compensador ao sistema. Os resultados do sistema projetado são comparados pelo desempenho através de simulação.*

**Palavras-chave:** *Isolamento, Vibração, Controle, Compensador.*

### 1. INTRODUÇÃO

As vibrações que ocorrem em máquinas e estruturas é indesejável, pois causa o desconforto e insegurança para o homem. Estas devem ser eliminadas ou reduzidas ao máximo, através do isolamento de vibrações. Isolar com precisão as vibrações de um equipamento tem sido um objeto de constantes estudos. O controle do tipo passivo foi o primeiro passo no sentido de isolar vibrações, porém suas aplicações são muito restritas, portanto se faz necessário utilizar o controle ativo, uma vez que os resultados alcançados costumam ser extremamente vantajosos. Ho (1990), apresentou uma plataforma de isolamento de vibrações sem contato utilizando um amortecedor magnético. Sievers *et al.* (1988) investigaram o isolamento ativo de vibrações em máquinas sobre um único eixo de uma estrutura flexível. Reed (1988) discutiu o uso de um elemento puramente magnético como controle ativo para reduzir a aceleração de plataformas. Watters (1988) projetou um sistema de bancada de teste para motores diesel com o objetivo de investigar o isolamento de vibração ativa usando um controlador analógico digital híbrido. Ross (1988) analisou o isolamento ativo do maquinário de plataformas de navio. Lurie *et al.* (1991) realizaram um estudo de suspensão ativa para o isolamento de vibração na indústria automobilística. Zhou *et al.* (1995)

apresentaram um sistema para isolamento ativo de vibrações de base, através de um atuador eletromagnético. Dana (1997) realizou um estudo sobre o controle de vibração ativa em baixa frequência utilizando um sistema de alavanca.

Técnicas de controle aplicadas a um sistema de alavanca para isolamento de vibração de base são utilizadas neste trabalho. Inicialmente é feita a modelagem do sistema sob a forma de função de transferência. Em seguida, controle ativo composto de um motor DC, sensor e parafuso sem-fim é aplicado ao sistema obtendo-se uma realimentação e conseqüentemente melhorando sua performance. Finalmente, um compensador PID (proporcional, integral e derivativo) projetado pelo método de Ziegler e Nichols (1942) é acrescentado ao sistema. O sistema projetado é simulado para diversas situações acima, quando submetido a um sinal de referência e a um distúrbio e os resultados são comparados usando a teoria clássica de controle.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo do sistema, representado na Fig. 1, consiste de uma barra de comprimento  $l$ , massa  $m_B$  e momento de inércia angular  $J_B$ , bi-apoiada nos pontos **A** e **B** com sistemas dotados de rigidez e amortecimento  $k_A$ ,  $k_B$ ,  $c_A$ , e  $c_B$ , respectivamente. Na extremidade **A**, está localizada uma massa absorvedora  $m_A$ . Esta massa tem a finalidade de fazer o contrabalanço com a massa  $m_I$ , massa na qual queremos isolar vibrações e que se encontra na extremidade **C**. A posição da alavanca será variada pelo atuador em função da vibração recebida pela base e transmitida para a barra de forma a obter uma configuração que propicie um melhor isolamento da massa  $m_I$ , com relação a vibração de base. Contudo para início do estudo, faremos algumas hipóteses simplificadoras como: considerar que a barra seja rígida com massa concentrada no centro geométrico; que esteja submetida a uma rotação no ponto **B** em relação ao plano da figura; que esteja submetida a uma translação vertical no ponto **B**; e que sofra pequenas oscilações.

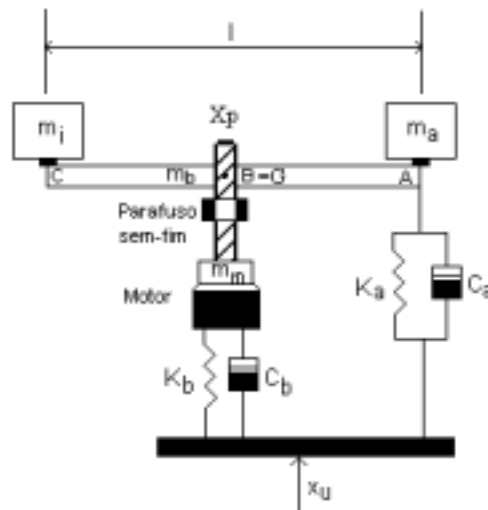


Figura 1 - Sistema de Alavanca

## 3. MODELAMENTO MATEMÁTICO

As equações do movimento (Thomson, 1978), de translação  $x(t)$  e rotação  $\theta(t)$ , aplicadas ao sistema de alavanca representado na Fig. 1, são:

Somatório das forças na barra:

$$\uparrow \sum F = m\ddot{x}_G$$

$$m\ddot{x}_G + k_A(x_A - x_U) + c_A(\dot{x}_A - \dot{x}_U) + k_B(x - x_U) + c_B(\dot{x} - \dot{x}_U) = 0 \quad (1)$$

Somatório dos momentos em relação ao ponto G:

$$\sum M_G = J\ddot{\theta}$$

$$J\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}\right)c_A\dot{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c_A\dot{\theta} + \left(\frac{1}{2}\right)k_A x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_A \theta = \left(\frac{1}{2}\right)c_A\dot{x}_U + \left(\frac{1}{2}\right)k_A x_U - \left(\frac{1}{2}\right)c_A\dot{x}_P - \left(\frac{1}{2}\right)k_A x_P \quad (2)$$

onde:

$$\begin{aligned} x_A &= x + x_P + \left(\frac{1}{2}\right)\theta \\ x_C &= x + x_P - \left(\frac{1}{2}\right)\theta \\ x_G &= x + x_P \end{aligned} \quad (3)$$

$x_P$  = Deslocamento vertical imposto ao ponto B da barra pelo controle ativo

$x_A$  = Deslocamento vertical do ponto A da barra

$x_C$  = Deslocamento vertical do ponto C da barra

$x_G$  = Deslocamento do centro de gravidade da barra

$x$  = Deslocamento vertical do motor

$\theta$  = Deslocamento angular da barra no ponto B.

$J$  = Momento de inércia do sistema de alavanca

Fazendo a substituição das Eqs. (3), na Eq. (1) e Eq. (2) encontraremos a seguinte equação na forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_A + c_B) & \left(\frac{1}{2}\right)c_A \\ \left(\frac{1}{2}\right)c_A & \left(\frac{1}{2}\right)^2 c_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_A + K_B) & \left(\frac{1}{2}\right)k_A \\ \left(\frac{1}{2}\right)k_A & \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} (c_A + c_B) & (k_A + K_B) & -m & -c_A & -k_A \\ \left(\frac{1}{2}\right)c_A & \left(\frac{1}{2}\right)k_A & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)c_A & -\left(\frac{1}{2}\right)k_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_U \\ x_U \\ \dot{x}_P \\ x_P \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Tendo como saída  $x_C$  e como entradas  $x_U$  e  $x_P$  considerando todas as condições iniciais nulas, aplicando a transformada de Laplace (Ogata, 1993) na Eq. (4), encontraremos as seguintes funções de transferências para o sistema de alavanca submetido a um distúrbio,  $x_U$ , e a um deslocamento imposto ao ponto B da barra pelo controle ativo,  $x_P$ . As equações referentes aos valores de  $\alpha$ 's e  $\beta$ 's foram obtidas em Araújo (1998).

$$G(s) = \frac{\beta_{20}s^4 + \beta_{21}s^3 + \beta_{22}2s^2 + \beta_{23}s + \beta_{24}}{s^4 + \alpha_1s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s + \alpha_4} \quad (5)$$

$$Gd(s) = \frac{\beta_{11}s^3 + \beta_{12}s^2 + \beta_{13}s + \beta_{14}}{s^4 + \alpha_1s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s + \alpha_4} \quad (6)$$

#### 4. OTIMIZAÇÃO DO SISTEMA DE ALAVANCA ATRAVÉS DAS MEDIDAS DE DESEMPENHO

A Figura 2, mostra os vários valores de rigidez (ka) versus especificações de desempenho (fator de amortecimento,  $\zeta$ , tempo de acomodação,  $t_s$ , máximo “Overshoot”, POS, e tempo de subida,  $t_r$ ) do sistema de alavanca. Os valores das especificações de desempenho foram obtidos fazendo uma variação da rigidez da mola e obtendo as raízes da equação característica da função de transferência do distúrbio (Eq. (5)).

A Figura 3, mostra vários valores de amortecimento viscoso (ca) e especificações de desempenho do sistema de alavanca. Os valores das especificações de desempenho foram obtidos utilizando-se o mesmo o procedimento anterior.

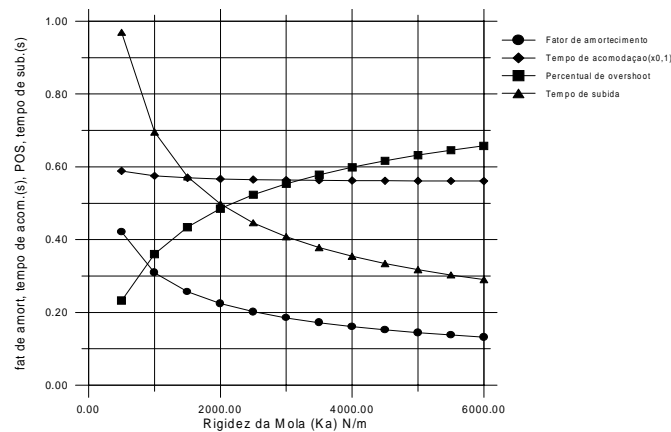


Figura 2 - Rigidez da mola (ka) x especificações de desempenho

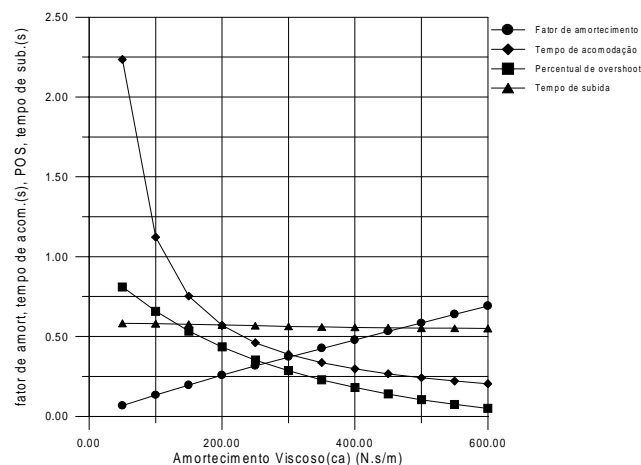


Figura 3 - Amortecimento Viscoso x especificações de desempenho

Analisando as Fig. 2 e Fig. 3, verificamos que:

- a) A medida que aumentamos a rigidez da mola, houve uma diminuição do fator de amortecimento, tempo de subida, tempo de acomodação, porém o percentual de overshoot aumentou.
- b) A medida que aumentamos o amortecimento viscoso houve um aumento do fator de amortecimento, porém o tempo de acomodação, o tempo de subida e o percentual de overshoot diminuíram.

A escolha da rigidez ( $k_a=1500$  N/m) foi obtida baseado na deflexão estática máxima ( $\delta_{max}=0,65$  m).

Analisando a Fig. 3, com um valor de rigidez  $k_a= 1500$  N/m e baseado no fator de amortecimento ( $\zeta=0,4$ ), encontrou-se um amortecimento viscoso ( $c_a= 250$  N\*s/m). A rigidez  $k_b$  e o amortecimento viscoso  $c_b$  foram escolhidos para que se tenha um apoio rígido.

Rigidez da mola:  $k_a=1500$  N/m  
 $k_b=5*k_a$

Amortecimento viscoso:  $c_a=250$  N\*s/m  
 $c_b=10*c_a$

## 5. O SISTEMA DE CONTROLE

A Figura 4, mostra a configuração do sistema completo, formado pelo sistema de alavanca, motor, parafuso sem-fim, sensor e compensador.

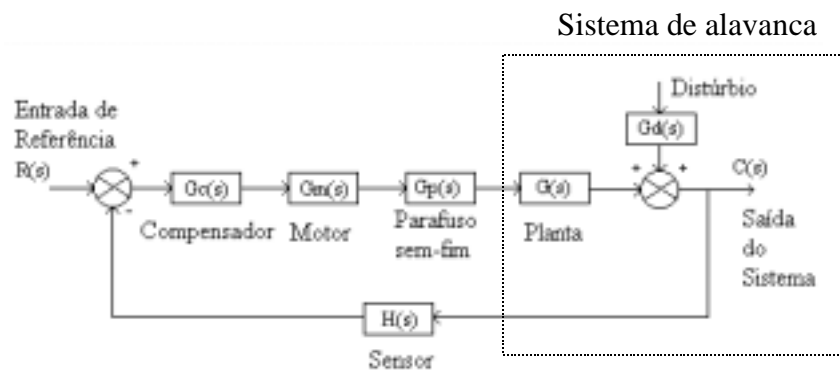


Figura 4 - Diagrama de blocos do sistema de alavanca

Utilizamos um motor Dc, funcionando como servo motor de ímã permanente controlado por armadura cuja função de transferência (Kuo, 1995) é dada por:

$$G_M(s) = \frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{\beta}{s^3 + \alpha_{m1}s^2 + \alpha_{m2}s} \quad (7)$$

onde:

$$\beta = \frac{K_m}{L a J_{MC}}; \quad \alpha_{m1} = \frac{L a c_{MC} + R a J_{MC}}{L a J_{MC}}; \quad \alpha_{m2} = \frac{R a c_{MC} + K_m K_b}{L a J_{MC}}$$

$K_m$  = Constante de torque do motor

$K_b$  = Constante de força contra-eletromotriz

$R_a$  = Resistência da armadura

$L_a$  = Indutância da Armadura

$J_{mc}$  = Momento de inércia do motor e da carga com relação ao eixo do motor

$c_{MC}$  = Atrito viscoso do motor e da carga em relação ao eixo do motor

O parafuso sem-fim converte o deslocamento angular  $\theta_m$  do eixo do motor em deslocamento longitudinal. Esta relação que é proporcional, é dada pelo passo de hélice do parafuso,  $L_p$ , cuja função de transferência é dada por:

$$G_p(s) = L_p \quad (8)$$

Para o sistema em análise, utilizamos um compensador PID, cuja função de transferência é dada por:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

onde:

$K_p$  = Ganho proporcional

$K_i$  = Ganho integral

$K_d$  = Ganho derivativo

## 6. ANÁLISES E RESULTADOS

O sistema de alavanca representado na Fig. 1, após a otimização, foi analisado utilizando os dados do apêndice, aplicando degrau unitário na base do sistema.

O resultado apresentado na Fig. 5, mostra um amortecimento nas amplitudes de vibração causados pelo distúrbio movimento de base, admitindo que o sistema tenha referência zero. Analisando a Fig. 5, verifica-se que o sistema otimizado possui um tempo acomodação de 4,6 segundos e erro de estado permanente de 100%. Uma vez que os valores obtidos são considerados insatisfatórios para o isolamento de vibração, se faz necessário a implementação de um compensador, com o objetivo de melhorar a resposta do sistema.

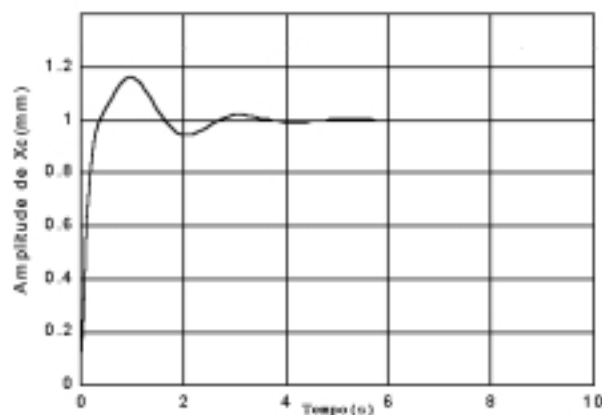


Figura 5 - Resposta do sistema de alavanca a um distúrbio[Xu] do tipo degrau

Utilizando o método de Ziegler & Nichols (1942), determinamos o ganho proporcional ( $K_p=370$ ), ganho derivativo ( $K_d= 5,32$ ) e o ganho integral ( $K_i = 6419$ ). A partir destes valores implementamos o compensador PID no sistema de alavanca.

Analisando a Fig. 6, verificamos que com a introdução do compensador, obtivemos resultados satisfatórios, pois houve uma diminuição considerável no tempo de acomodação (0,3 s), e do erro de estado permanente para aproximadamente zero.

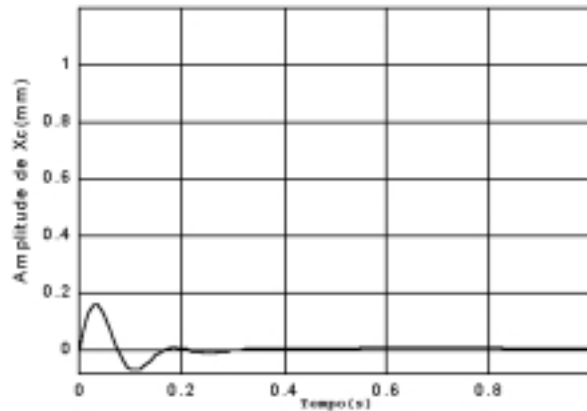


Figura 6 - Resposta do sistema de alavanca com compensador PID a um distúrbio[ $X_u$ ] do tipo degrau

Da Figura 7, observamos que o sistema otimizado submetido a uma entrada degrau unitário na referência e admitindo que o distúrbio é zero, apresenta um tempo de acomodação de 4,6 s e um erro de estado permanente de 100%.

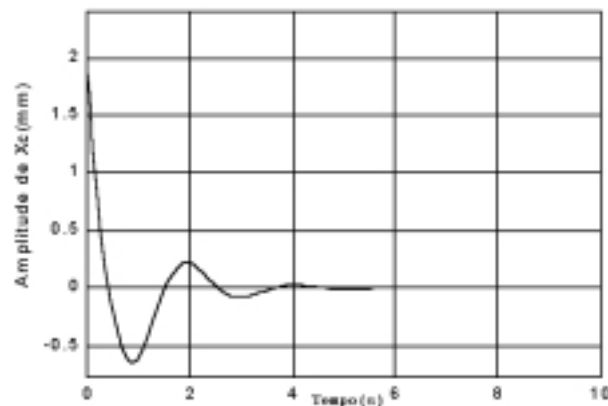


Figura 7 - Resposta do sistema de alavanca a uma entrada de referência [ $R_s$ ] do tipo degrau

Analisando a Fig. 8, após a introdução do compensador PID no sistema, verifica-se que houve uma diminuição considerável no tempo de acomodação (0,3 s) e um erro de estado permanente de aproximadamente zero, porém o percentual de overshoot ficou acima de 50%, não sendo satisfatório, pois desejamos que o sistema tenha um overshoot de no máximo 20%, portanto faz-se necessário um ajuste nos parâmetros ( $K_d$ ,  $K_i$  e  $K_p$ ), com o objetivo de diminuirmos o sobre-sinal excessivo.

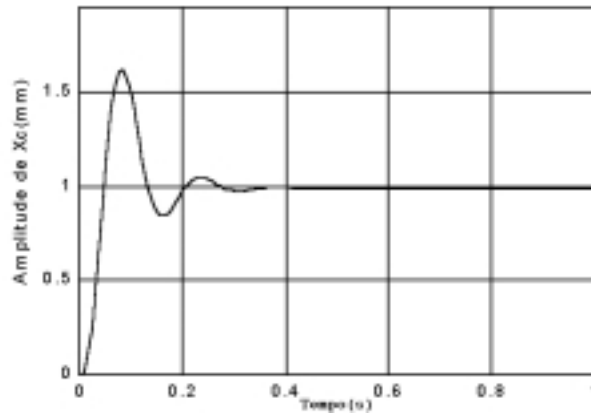


Figura 8 - Resposta do sistema de alavanca com compensador PID a uma entrada de referência [Rs] do tipo degrau

Após ajuste dos parâmetros do compensador ( $K_d = 10$ ) e ( $K_i = 3000$ ), observa-se da Fig. 9 e Fig. 10 comparadas com a Fig. 8 e Fig. 6, respectivamente, bons resultados, tanto para a resposta com entrada na referência quanto para um distúrbio na base.

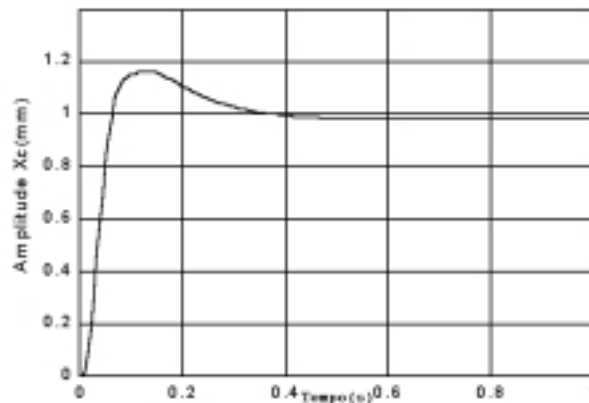


Figura 9 - Resposta do sistema de alavanca com compensador ajustado PID a uma entrada de referência [Rs] do tipo degrau

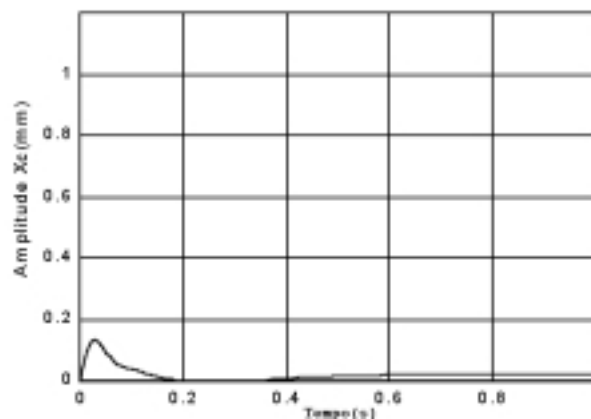


Figura 10 - Resposta do sistema de alavanca com compensador ajustado PID a um distúrbio [Xu] do tipo degrau



## 7. CONCLUSÕES

Através das técnicas de controle aplicada ao sistema de alavanca representado na Fig. 1, foram obtidos resultados satisfatórios, uma vez que conseguimos reduzir o nível de vibração da massa  $m_i$ . Verificamos uma redução no erro de estado permanente próximo de zero e uma redução considerável do tempo de acomodação. O sistema projetado através das técnicas de controle utilizadas no sistema de alavanca apresentou uma resposta suficientemente rápida e amortecida, portanto a utilização do controle ativo com a implementação do controlador PID para o isolamento de vibração possibilitou um melhor comportamento dinâmico do sistema.

## REFERÊNCIAS

- Araújo, F. M. U., 1998, Um sistema mecatrônico para controle ativo de vibrações, dissertação, Universidade Federal da Paraíba-CAMPUS I, João Pessoa, Paraíba.
- Dana, S. S., 1997, Preliminary considerations on active vibration control of low frequency systems using a lever, 7<sup>a</sup> International Conference on Dynamics Problems in Mechanics, ABCM, Angra dos Reis, Rio de Janeiro, pp. IV-VI.
- Ho, Forward V. K., 1990, Magf float (Vibration isolation platform), Proceeding of 36 th International Instrumentation Symposium, pp. 311-312.
- Kuo, B. C., 1995, Automatic control systems, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, Seventh Edition.
- Lurie, B.J., Franson, J.L. & Lasclin, R., 1991, Active suspensions for vibration isolation Proceedings of 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AA/ASME/ASCE/AHS/ASC, Baltimore, MD, pp. 2256-2260.
- Ogata, K., 1993, Engenharia de controle moderno, Prentice/Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 2<sup>a</sup> Edição.
- Reed, R. S., 1998, Shock isolation using an active magnetostrictive element, The 59<sup>th</sup> Shock and Vibration Symposium, Albuquerque, New México.
- Ross, C., 1988, Active isolation of ship machinery platform, Proceeding of 27th Conference on Decision and Control, Austin, Texas, pp. 2045-2046.
- Sievers, L. A., Von F. & Andreas H., 1988, Linear control design for active vibration isolation of narrow band disturbance, Proceedings of 27th conference on Decision and Control, Austin, Texas, pp. 1032-1037.
- Thomson, W. T., 1978, Teoria da vibração com aplicações, Editora Interciência Ltda., Rio de Janeiro, RJ.
- Watters, B. G., Coleman, R. B., Duckworth, R. & Colin, F., 1988, Active isolation of ship machinery platform, Proceedings of 27th Conference on Decision and Control, Austin, Texas, pp. 2045-2046.
- Ziegler, J.G. & Nicholas, N.B., 1942, Optimum settings for automatic controllers, Trans. ASME, pp.759-768.
- Zou, S. W., Dana S.S. & Rogers, C. A., 1995, An active magnetrostrictive mount for isolating base vibration – Part I, Anais em CD-ROM do XIII COBEM.

## APÊNDICE

### Dados Utilizados na Simulação

A Planta:

$$m_A = 100 \text{ Kg}$$

$$k_A = 1500 \text{ N/m}$$

$$c_A = 250 \text{ N*s/m}$$

$$\begin{aligned}m_I &= 100 \text{ Kg} \\m_B &= 40 \text{ Kg} \\m_m &= 10 \text{ Kg}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_B &= 5 \cdot k_A \\J &= 122 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \\m &= 250 \text{ Kg}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_B &= 10 \cdot c_A \\l &= 2 \text{ m}\end{aligned}$$

O Motor:

$$\begin{aligned}K_m &= 0,0621 \text{ N.m/A} \\K_b &= 0,0783 \text{ v.s} \\R_a &= 0,13 \text{ ohms} \\L_a &= 1,22 \times 10^{-3} \text{ H} \\J_{mc} &= 0,0019 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \\c_{MC} &= 0,01 \text{ N.s/m}\end{aligned}$$

O Sensor, Parafuso Sem-Fim e Compensador

$$\begin{aligned}K_s &= 1 \\L_p &= 0,01 \\K_p &= 379,2 \\K_d &= 5,38 \\K_i &= 6670\end{aligned}$$

## **CONTROL TECHNIQUES APPLIED TO A LEVER SYSTEM FOR ISOLATION OF VIBRATIONS**

Abstract. The goal of this work is an analysis about dynamic performance of a lever system for active control and vibration isolation in low frequency range. The dynamic model of the lever system is obtained from Newton's equations and written in the matricial form. Initially, just the model of the plant, composed of the bar and of the supports, it is analyzed. It is performed an optimization of the parameters stiffness and damping verifying the values that indicate the best performance the system. After, the active control is introduced, composed of sensor, amplifier, motor and endless screw. Finally, a compensator is introduced into the system. The performance of the designed system are addressed through numeric simulations.

Keywords: Isolation, Vibration, Control, Compensator